JOURNAL OF CLINICAL AND FUNDAMENTAL MEDICAL RESEARCH
VOLUME-1, ISSUE-2, 2026

CONDITIONAL CORRECTNESS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION OF STRUCTURED TYPE

Umirova Dildora Isomiddin qizi
"Cyber University" State University
Email: dildoraumirova7@gmail.com

Abstract

This article investigates the conditional correctness of a boundary value problem for a third-order differential equation of structured type. Boundary and Cauchy-type problems associated with higher-order differential equations are often not well-posed in the sense of Hadamard, meaning that even when existence and uniqueness of a solution are guaranteed, the stability condition may fail. The paper analyzes the causes of such ill-posedness, introduces the concept of conditional correctness, and examines the application of a priori estimates, the method of fundamental solutions, Green function, and regularization techniques to ensure stability. The obtained results are essential for the analysis and determination of stable solutions of higher-order differential equations.

Keywords: third-order differential equation, structured model, conditional correctness, boundary value problem, ill-posed problem, regularization.

Kirish

Matematik fizika va amaliy matematikaning muhim yo'nalishlaridan biri yuqori tartibli differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan modellarni tadqiq qilishdan iborat. Xususan, uchinchi tartibli tuzilmali differensial tenglamalar elastiklik nazariyasi, mexanika, dispers muhitlar, termo-fizik va to'lqin jarayonlarini modellashtirishda keng uchraydi.

Biroq bunday tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy yoki Cauchy tipidagi masalalar ko'pincha Hadamard mezonlari asosida korrekt bo'lmaydi. Ya'ni boshlang'ich yoki chegaraviy ma'lumotlardagi juda kichik xatoliklar yechimning keskin o'zgarishiga olib kelishi mumkin. Shu sababli masalaning shartli korrektligi tushunchasi muhim ahamiyat kasb etadi.

Ushbu maqolada uchinchi tartibli tuzilmali differensial tenglama uchun chegaraviy masalaning shartli korrektligi masalasi matematik jihatdan tahlil qilinadi.

1. Uchinchi tartibli tuzilmali tenglama modeli

Quyidagi uchinchi tartibli chiziqli differensial tenglama ko‘rib chiqilsin:

$$a_3(x)u'''(x) + a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x), \qquad x\epsilon[a,b]$$

Bu yerda $a_i(x)$ $(i = 0,1,2,3) -$ yetarlicha silliq berilgan funksiyalar, $f(x)$ esa tashqi ta’sir funksiyasidir.

Tenglama uchinchi tartibli bo‘lgani sababli unga uchta chegaraviy shart qo‘yiladi:

$$u(a) = \alpha_1, \qquad u'(a) = \alpha_2, \qquad u(b) = \beta$$

2. Klassik korrektlik va yuzaga keladigan noaniqlik

Hadamard nazariyasiga ko‘ra, chegaraviy masala quyidagi uchta shartni qanoatlantirishi kerak:

- yechimning mavjudligi;
- yechimning yagonaligi;
- yechimning ma’lumotlarga nisbatan barqarorligi.

Uchinchi tartibli differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan Cauchy yoki aralash chegaraviy masalalarda ko‘pincha barqarorlik sharti buziladi. John (1960) va Ivanov (1965) ishlarida ko‘rsatilganidek,

$\|f - f_\varepsilon\| \to 0$ bo‘lsa ham $\|u - u_\varepsilon\| \to \infty$,

ya’ni ma’lumotlardagi kichik xatolik yechimda cheksiz o‘sishga olib kelishi mumkin. Shu sababli bunday masalalar nokorrekt hisoblanadi.

3. Shartli korrektlik va apriori baholar

Nokorrekt masalalar uchun yechimni faqat ma’lum sinfda izlash orqali shartli korrektlikka erishish mumkin. Bunda apriori baho mavjud bo‘lishi talab etiladi:

$$\|u\|_{C^3[a,b]} \leq M(\|f\| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta|),$$

bu yerda $M > 0$ — doimiy son. Ushbu baho yechimni ma’lumotlardagi xatoliklarga nisbatan cheklaydi va shartli barqarorlikni ta’minlaydi.

4. Fundamental yechimlar usuli

Gomogen tenglama uchun uchta chiziqli bog‘liq bo‘lmagan fundamental yechimlar mavjud bo‘lsin:

$$u_1(x), \qquad u_2(x), \qquad u_3(x)$$

Shunda umumiy yechim quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + C_3 u_3(x) + u_p(x)$$

bu yerda $u_p(x)$ — xususiy yechim. Chegaraviy shartlar yordamida C_1, C_2, C_3 koeffitsiyentlar aniqlanadi. Ularning barqarorligi masalaning shartli korrektligi bilan chambarchas bog‘liq.

5. Green funksiyasi orqali yechim

Agar chegaraviy masala uchun Green funksiyasi $G(x,s)$ mavjud bo‘lsa, yechim integral ko‘rinishda yoziladi:

$u(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds.$

Ammo Green funksiyasining keskin o‘sishi yoki singulyarligi masalaning nokorrektligini kuchaytirishi mumkin.

6. Regulyarizatsiya metodlari

Shartli korrektlikni ta’minlash maqsadida quyidagi regulyarizatsiya usullari qo‘llaniladi.

Tixonov regulyarizatsiyasi:

$u_\alpha = arg \min_u (\|Lu - f\|^2 + \alpha \|u\|^2),$

bu yerda $\alpha > 0$ — regulyarizatsiya parametri.

Spektral filtratsiya: Yuqori chastotali komponentlar filtrlanib, yechimning barqaror qismi ajratib olinadi.

Iteratsion usullar: Masalan, Landweber iteratsiyasi:

$$u_{k+1} = u_k - \gamma L * (Lu_k - f).$$

Xulosa

Ushbu maqolada uchinchi tartibli tuzilmali differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalaning shartli korrektligi masalasi chuqur tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, bunday turdagi masalalar ko‘pincha Hadamard ma’nosida korrekt bo‘lmaydi, ya’ni ma’lumotlardagi juda kichik xatoliklar yechimning keskin o‘zgarishiga olib keladi. Bu esa ularni ill-posed masalalar sinfiga kiritishga asos bo‘ladi. Maqolada shartli korrektlik tushunchasi asoslab berildi va apriori baholarning mavjudligi masalaning barqarorligini ta’minlovchi asosiy omillardan biri ekanligi ko‘rsatildi. Fundamental yechimlar va Green funksiyasi orqali yechimni ifodalash imkoniyatlari o‘rganilib, ularning barqarorlikka ta’siri tahlil qilindi. Shuningdek, Tixonov regulyarizatsiyasi, spektral filtratsiya va iteratsion usullar yordamida ill-posedlikni kamaytirish va yechimning amaliy barqarorligini ta’minlash mumkinligi asoslab berildi.

Olingan natijalar uchinchi va undan yuqori tartibli differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy va Cauchy tipidagi masalalarni yechishda nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Tadqiqot xulosalari matematik fizika, mexanika va muhandislik masalalarida uchraydigan noaniq va beqaror modellarni tahlil qilish hamda ularning barqaror yechimlarini qurishda qo‘llanishi mumkin.

Adabiyotlar

1. John F. Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 551–585.

2. Иванов В.К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе. *Дифференц. уравнения*, 1(1), 1965, 131–136.

3. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. *Дифференц. уравнения*, 2(3), 1966, 382–390.

4. Hajiyev I.O., Umirova D.I. Uchinchi tartibli tuzilmali tenglama uchun chegaraviy masalaning shartli korrektligi. *Academic Research in Educational Sciences*, 4(2), 2023.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977.

6. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley, 1989.