JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCH OF UZBEK SCHOLARS
VOLUME-1, ISSUE-6, 2026

GEOMETRY OF GRADIENT VECTOR FIELDS

Abdulhakim Abdusattorov Abdusamat o'g'li
Student Termez University of Economics and Service
E-mail: Abdulhakimabdusattorov7@gmail.com

Abstract

This article analyzes the differential-geometric invariants of gradient vector fields. The properties of orthogonality to level surfaces, irrotationality, and harmonicity are presented with rigorous mathematical proofs, and their interrelationships are demonstrated. Three equivalent characterizations of a conservative field in simply connected domains are proven. The dimension-dependent structure of gradient fields is determined through the fundamental solutions of the Laplace equation. The applications of the results in electrostatics, hydrodynamics, and optimization theory are discussed.

Keywords

gradient, level surface, conservative field, Laplace equation, rotor (curl), divergence, harmonic function.

GRADIENT VEKTOR MAYDONLAR GEOMETRIYASI

Abdulhakim Abdusattorov Abdusamat o'g'li
Termiz iqtisodiyot va servis universiteti talabasi

Annotatsiya. Mazkur maqolada gradient vektor maydonlarning differensial-geometrik invariantlari tahlil qilingan. Sath sirtlariga ortogonallik, uyurmasizlik va garmoniklik xossalari qat'iy matematik isbotlar bilan keltirilib, ularning o'zaro bog'liqligi ko'rsatilgan. Bir bog'lamli sohalarda konservativ maydonning uchta ekvivalent tavsifi isbotlangan. Laplas tenglamasining fundamental yechimlari orqali gradient maydonlarning o'lchamga bog'liq tuzilishi aniqlangan. Natijalarning elektrostatika, gidrodinamika va optimizatsiya nazariyasidagi tatbiqlari muhokama qilingan.

Kalit so'zlar: gradient, sath sirti, konservativ maydon, Laplas tenglamasi, rotor, divergensiya, garmonik funksiya.

1. Kirish (Introduction)

Gradient operatori matematik fizika va differensial geometriyaning fundamental tushunchalaridan biri bo'lib, skalyar maydonning fazoviy o'zgarish tezligi va yo'nalishini to'liq tavsiflaydi [1]. Ushbu operator 19-asr o'rtalarida Gamilton tomonidan kvaternionlar nazariyasi doirasida shakllantirilib, keyinchalik Gibbs va Hevisayd tomonidan zamonaviy vektor analiz apparatiga kiritilgan [2].

Gradient vektor maydonlarning geometrik xossalarini o'rganish zarurati ularning fundamental fizik maydonlar — elektrostatik, gravitatsion va gidrodinamik maydonlar — hamda zamonaviy optimizatsiya algoritmlaridagi markaziy o'rni bilan bog'liq [3, 4]. Xususan, elektrostatik maydon kuchlanganligi $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ ko'rinishda, gravitatsion maydon esa $\mathbf{g}=-\nabla\Phi$ ko'rinishda ifodalanadi.

2. Metodlar (Methods)

2.1. Matematik apparat

Tahlil $\mathbb{R}^n$ Yevklid fazosida olib boriladi, barcha qaralayotgan funksiyalar $C^2(U)$-sinfga mansub, bu yerda $U \subset \mathbb{R}^n$ ochiq to'plam. Asosiy differensial operatorlar Dekart koordinatalar sistemasida quyidagicha aniqlanadi:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathbf{e}_i, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \quad \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Uch o'lchovli holat uchun rotor operatori:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)^T$$

Levi-Civita simvoli ε_{ijk} orqali ixcham ko'rinishda: $(\nabla \times F)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\delta F_k}{\delta x_j}$.

2.2. Tahlil usullari

Quyidagi qat'iy matematik usullar qo'llaniladi:

Sath sirtlari tahlili. $S_c = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$ sath sirtida yotuvchi ixtiyoriy silliq parametrlangan $\gamma: (-\delta, \delta) \to Sc$ egri chiziq qaralib, $f(\gamma(t)) = c$ ayniyatdan vaqt bo'yicha hosila olinadi va *t*=0 dagi qiymat tahlil qilinadi.

Differensial invariantlar. Gradient maydonning divergensiyasi va rotori hisoblanib, ularning nolga tenglik shartlari tekshiriladi. Bunda Klero teoremasi (aralash xususiy hosilalarning tengligi) va antisimmetrik tenzorlar xossalaridan foydalaniladi.

Konservativlik mezonlari. Yopiq kontur integrallari, Stoks teoremasi va Puankare lemmasi yordamida konservativ maydonning ekvivalent tavsiflari orasidagi mantiqiy bog'lanishlar isbotlanadi.

Fundamental yechimlar tahlili. Laplas tenglamasining $n = 2$ va $n = 3$ o'lchamlardagi fundamental yechimlari $(lnr\ va\ 1/r)$ qaralib, ularning gradient maydonlari aniq hisoblanadi va divergensiyasi tekshiriladi.

3. Natijalar (Results)

3.1. Ortogonallik teoremasi

Teorema 1. Faraz qilaylik, $f \in C1(U)$ va $x_0 \in U$ nuqtada$\nabla f(x_0) \neq 0$ bo'lsin. U holda $\nabla f(x_0)$ vektori $Sf(x_0)$ sath sirtiga x_0 nuqtada normal yo'nalgan, ya'ni sath sirtiga urinma bo'lgan ixtiyoriy $\boldsymbol{v}$ vektor uchun $f(x_0) \cdot \boldsymbol{v} = 0$ bajariladi.

Isbot. $\boldsymbol{\gamma}: (-\varepsilon, \varepsilon) \to Sf(\boldsymbol{x}0)$ silliq egri chiziq bo'lib, $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{x}0$ bo'lsin. U holda barcha t uchun $f(\boldsymbol{\gamma}(t)) = f(x_0)$. Zanjir qoidasiga ko'ra:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t\ \ 0} f(\gamma(t)) - \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0) - 0$$

$\boldsymbol{\gamma}'(0)$ sath sirtiga ixtiyoriy urinma vektor bo'lganligi sababli, $\nabla f(x_0)$ barcha urinma vektorlarga ortogonal. Demak, gradient sath sirtiga normal yo'nalgan.

1-misol. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ funksiya uchun sath sirtlari ellipsoidlardan iborat. Gradient $\nabla f = (2x, 4y, 6z)$ bu sirtlarga normal yo'nalgan bo'lib, (1,0,0) nuqtada $\nabla f(1,0,0) = (2,0,0)$ vektori $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ ellipsoidiga perpendikulyar.

3.2. Rotorning nolga tengligi

Teorema 2. Agar $f \in C^2(U)$ bo'lsa, u holda barcha $x \in U$ uchun

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

Isbot. Komponenta bo'yicha yozamiz:

$$(\nabla \times \nabla f)_i = \underset{j,k}{} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad = \underset{j,k}{} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

$f \in C^2$ bo'lganligi sababli, Klero teoremasiga ko'ra $\frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_k}$ matritsasi *j* va *k* indekslarga nisbatan simmetrik. ε_{ijk} esa *j* va *k* indekslarga nisbatan antisimmetrik. Simmetrik va antisimmetrik ifodalarning yig'indisi aynan nolga teng:

$$\underset{j,k}{} \varepsilon_{ijk} S_{jk} = 0 \quad \text{agar} \quad S_{jk} = S_{kj}$$

Demak, har bir *i* komponenta uchun $(\nabla \times \nabla f)i = 0$.

Bu teorema gradient maydonlarning uyurmasiz ekanligini ko'rsatadi. Fizik nuqtai nazardan bu shuni anglatadiki, gradient maydonlar hech qachon berk kuch chiziqlariga ega bo'la olmaydi.

3.3. Garmonik funksiyalar va ularning gradient maydonlari

Teorema 3. Laplas tenglamasining $\mathbb{R}n$ fazodagi sferik-simmetrik fundamental yechimlari quyidagi ko'rinishga ega:

$$\Phi_n(r) = \begin{array}{ll} c_2 \ln r, & n = 2 \\ c_n r^{2-n}, & n \geq 3 \end{array}$$

bu yerda $r = \| x \|$, cn esa normalashtiruvchi o'zgarmas.

Isbot (n=3 hol uchun). Radial funksiya uchun Laplas operatori sferik koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} \quad r^2\frac{df}{dr}$$

$f(r) = r^{-1}$uchun:

$$\frac{df}{dr} = -r^{-2}, \quad r^2\frac{df}{dr} = -1, \quad \frac{d}{dr}(-1) = 0$$

Demak, $\Delta(r^{-1}) = 0$ barcha $r > 0$ uchun.

Ushbu fundamental yechimlarning gradientlari fizikada muhim ahamiyatga ega:

O'lcham	**Φ*n* (*r*)**	**∇Φ*n***	**Divergensiya**	**Fizik talqini**
$n = 2$	lnr	$r/r2$	$0(r \neq 0)$	Chiziqli zaryad maydoni
$n = 3$	$1/r$	$-r/r3$	$-4\pi\delta(r)$	Nuqtaviy zaryad maydoni

n=3 holatda divergensiyaning delta-funksiya ekanligi Gauss teoremasi orqali isbotlanadi:

$$_{S_R} \nabla \quad \frac{1}{r} \quad \cdot d\mathbf{S} = \quad _{S_R} \quad -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} R^2 d\Omega = -4\pi$$

3.4. Konservativ maydon tavsiflari orasidagi ekvivalentlik

Teorema 4. Bir bog'lamli $U \subset \mathbb{R}^3$ sohada silliq $\boldsymbol{F}$ vektor maydoni uchun quyidagi uchta tasdiq ekvivalent:

(i) Potensial mavjud: $\exists\varphi \in C2(U)$ shundayki $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$;

(ii) Yopiq kontur bo'yicha integral nol: ixtiyoriy silliq yopiq $C \subset U$ uchun $CF \cdot dr = 0$;

(iii) Rotor nolga teng: barcha $x \in U$ uchun $\nabla \times F = 0$.

Isbot. $(i) \Rightarrow (ii)$: $C \quad \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{dr} = \varphi(\boldsymbol{r}1) - \varphi(\boldsymbol{r}0)$. Yopiq konturda $\boldsymbol{r}1 = \boldsymbol{r}0$ bo'lgani uchun integral nolga teng.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Stoks teoremasiga ko'ra $S(\nabla \times F) \cdot dS$. Agar chap tomon ixtiyoriy C uchun nol bo'lsa, o'ng tomon ixtiyoriy S sirt uchun nol bo'lishi kerak, bu esa $\nabla \times F = 0$ bo'lgandagina bajariladi.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Puankare lemmasi bir bog'lamli sohada rotori nol bo'lgan maydonning potensialga ega ekanligini ta'minlaydi. Potensial quyidagi formula orqali tiklanadi: $\varphi(\mathbf{x}) = {}_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, bu yerda integral yo'lga bog'liq emas.

2-misol. $F(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$ maydonini tekshiramiz. Rotorini hisoblaymiz:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = (0 - 0, 3z^2 - 3z^2, 2x - 2x) = \mathbf{0}$$

Demak, maydon konservativ. Potensialni tiklaymiz: $\varphi = x^2y + xz^3 + C$ ekanligi tekshiriladi: $\nabla\varphi = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2) = \boldsymbol{F}$.

4.1. Natijalarning geometrik talqini

Olingan natijalar gradient vektor maydonlarning uchta fundamental geometrik invariantini ochib beradi.

Birinchi invariant — ortogonallik. Teorema 1 ga ko'ra, gradient vektori har doim sath sirtiga perpendikulyar yo'nalgan. Bu xossaning buzilishi faqat $\nabla f = \mathbf{0}$ bo'lgan kritik nuqtalarda kuzatiladi. Kritik nuqtalarda sath sirtlari aniqlanmagan bo'lib, Mors lemmasi yordamida ularning atrofidagi geometrik tuzilish tasniflanadi [5]. Xususan, minimum yoki maksimum nuqtalarida sath sirtlari yopiq giper-sirtlarga aylanadi, egar nuqtalarda esa kesishuvchi sirtlar paydo bo'ladi. Bu esa ∇f oqimining topologiyasini to'liq belgilaydi.

Ikkinchi invariant — uyurmasizlik. $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ ayniyati matematik jihatdan Klero teoremasining bevosita natijasi bo'lib, fizik jihatdan gradient maydonlarda aylanma harakat mavjud emasligini bildiradi. Bu esa gradient maydonlarni, masalan, Bio-Savar qonuni bilan beriladigan magnit maydonidan $(\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu 0 \boldsymbol{J})$ tubdan farqlaydi. Magnit maydonida berk kuch chiziqlari mavjud bo'lsa, gradient maydonlar uchun bunday holat mumkin emas [2, 3].

Uchinchi invariant — garmoniklik. Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiyalarning gradient maydonlari divergensiyasiz bo'ladi $(\nabla \cdot \nabla f = 0)$. Bu manbalar va oqimlar mavjud bo'lmagan sohalardagi maydonlarni tavsiflaydi. Garmonik funksiyalarning o'rta qiymat xossasiga ko'ra, bunday funksiyalarning qiymati ixtiyoriy sferadagi o'rtacha qiymatiga teng bo'lib, bu ularning yuqori darajadagi silliqligini ta'minlaydi [6].

4.2. Amaliy tatbiqlar

Elektrostatik maydonlar. Teorema 4 elektrostatikaning matematik asosini tashkil etadi. $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ maydoni uchun rotorning nolga tengligi Faradey qonunining statik holatini $(\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0)$ ifodalaydi. Gauss qonuni $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon 0$ bilan birgalikda Puasson tenglamasini beradi: $\Delta V = -\rho/\varepsilon 0$. Nuqtaviy zaryad uchun potensial $V = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ bo'lib, uning gradienti $E = qr/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$ Kulon qonunini beradi [1, 3].

Gidrodinamik potensial oqimlar. Siqilmaydigan va uyurmasiz suyuqlik harakati uchun tezlik maydoni gradient shaklida ifodalanadi: $v = \nabla \Phi$. Uzluksizlik tenglamasi $\nabla \cdot v = 0$ Laplas tenglamasiga olib keladi: $\Delta \Phi = 0$. Bu tenglamaning fundamental yechimlari $\Phi \sim 1/r$ dipol, manba va oqim modellarini qurishda ishlatiladi [4].

Optimizatsiya algoritmlari. Gradient tushish usuli $x_{k+1} = x_k - \eta_k \nabla f(x_k)$ iteratsiyasi orqali maqsad funksiyasining lokal minimumini topadi. $\nabla f = 0$ sharti statsionar nuqtalarni aniqlaydi, Gessian matritsasi $H_f = \nabla(\nabla f)^T$ esa bu nuqtalarning xarakterini (minimum, maksimum, egar) tasniflaydi [7].

4.3. Cheklanishlar va istiqbollar

Tadqiqotning asosiy cheklanishi — tahlillarning tekis Yevklid fazosi bilan chegaralanganligidir. Riman ko'pxilliliklarida gradient operatori metrik tenzor orqali umumlashtiriladi:

$$(\nabla f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Bu holda rotorning nolga tenglik xossasi saqlanib qoladi, ammo Laplas operatori Beltrami-Laplas operatoriga aylanadi:

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f \right).$$

Egrilik mavjud bo'lganda garmonik funksiyalarning xossalari Boyxner ayniyati orqali Richehi egriligi bilan bog'lanadi [6]:

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = |\mathrm{Hess}\, f|^2 + \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$$

Kelgusidagi tadqiqotlar uchun Mors nazariyasi doirasida gradient oqimlarning topologik invariantlarini o'rganish, singulyar nuqtalarga ega bo'lgan potensiallarning bifurkatsion tahlili va fraktal chegarali sohalarda garmonik funksiyalarning asimptotik xossalarini aniqlash istiqbolli yo'nalishlar hisoblanadi.

5. Xulosa

Mazkur tadqiqot doirasida gradient vektor maydonlarning differensial-geometrik tahlili amalga oshirildi va quyidagi asosiy ilmiy natijalar olindi.

Birinchidan, gradient vektorining sath sirtlariga ortogonallik xossasi qat'iy isbotlandi (Teorema 1). Ushbu xossa $\nabla f \neq 0$ bo'lgan barcha nuqtalarda bajarilib, gradient oqim chiziqlari va ekvipotensial sirtlar o'rtasidagi fundamental geometrik munosabatni ifodalaydi. Kritik nuqtalarda ($\nabla f = 0$) bu munosabat buziladi, bu esa Mors nazariyasi doirasida alohida tasnifni talab qiladi. Ortogonallik xossasi fizikada kuch chiziqlarining ekvipotensial sirtlarga perpendikulyarligini ta'minlovchi asosiy geometrik mexanizm hisoblanadi.

Ikkinchidan, gradient maydonlarning uyurmasizlik invarianti $\nabla \times (\nabla f) = 0$ Klero teoremasi asosida isbotlandi (Teorema 2). Bu ayniyat gradient maydonlarning topologik tuzilishiga jiddiy cheklov qo'yadi: bunday maydonlarda berk kuch chiziqlari yoki aylanma harakat mavjud bo'la olmaydi. Bu xossa gradient maydonlarni uyurmali maydonlardan (magnit maydoni, turbulent oqimlar) tubdan farqlaydi va ularning konservativ tabiatini belgilaydi.

Uchinchidan, konservativ maydonlarning uchta ekvivalent tavsifi — potensialning mavjudligi, yopiq kontur bo'yicha sirkulyatsiyaning nolga tengligi va rotorning nolga tengligi — bir bog'lamli sohalar uchun to'liq isbotlandi (Teorema 4). Bu ekvivalentlik Puankare lemmasi va Stoks teoremasiga asoslanib, fizik maydonlarning potensial nazariyasi uchun mustahkam matematik poydevor yaratadi. Potensialni tiklash formulasi $\varphi(x) = \int_{x0}^{x} F \cdot dr$ amaliy hisoblashlar uchun bevosita algoritmik imkoniyat beradi.

To'rtinchidan, Laplas tenglamasining fundamental yechimlari tahlili orqali garmonik funksiyalar gradient maydonlarining o'lchamga bog'liq tuzilishi aniqlandi. n=2 o'lchamda logarifmik potensial (ln$r$), n=3 o'lchamda esa Kulon potensiali (1/r) fundamental ahamiyatga ega ekanligi ko'rsatildi. Bu yechimlarning divergensiyasi delta-funksiya orqali ifodalanib, ularning nuqtaviy manbalar bilan bog'liqligini ochib beradi.

Beshinchidan, olingan nazariy natijalarning amaliy ahamiyati uchta muhim sohada namoyon bo'ladi: (a) elektrostatikada $E = -\nabla V$ munosabati va Puasson tenglamasi $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$ orqali maydonlarni hisoblash; (b) gidrodinamikada potensial oqimlar uchun $v = \nabla\Phi$ va Laplas tenglamasi $\Delta\Phi = 0$ orqali oqim modellarini qurish; (c) optimizatsiya nazariyasida gradient tushish algoritmi orqali ko'p o'lchovli funksiyalarning ekstremumlarini topish.

Tadqiqot natijalari gradient vektor maydonlar geometriyasining yaxlit nazariy asosini yaratib, ularni turli tabiatga ega fizik va matematik masalalarga tizimli tatbiq etish imkonini beradi. Kelgusida ushbu natijalarni Riman ko'pxilliliklari, singulyar potensiallar va nochiziqli dinamik sistemalar uchun umumlashtirish dolzarb ilmiy vazifa bo'lib qolmoqda. Ayniqsa, Beltrami-Laplas operatori orqali egrilikning garmonik funksiyalar xossalariga ta'sirini o'rganish va Mors-Bott nazariyasi doirasida kritik nuqtalarning topologik klassifikatsiyasini amalga oshirish istiqbolli yo'nalishlar sifatida belgilandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2005). *Mathematical methods for physicists* (6th ed.). Elsevier.
2. Arnold, V. I. (1992). *Catastrophe theory* (3rd ed.). Springer-Verlag.
3. Batchelor, G. K. (2000). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
4. Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
5. do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian geometry*. Birkhäuser.
6. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (2nd ed.). American Mathematical Society.
7. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. MIT Press.
8. Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to electrodynamics* (4th ed.). Cambridge University Press.
9. Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics* (3rd ed.). Wiley.

10. Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics* (6th ed.). Cambridge University Press.

11. Mandelbrot, B. B. (1983). *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman.

12. Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). *Vector calculus* (6th ed.). W. H. Freeman.

13. Matsumoto, Y. (2002). *An introduction to Morse theory*. American Mathematical Society.

14. Milnor, J. (1963). *Morse theory*. Princeton University Press.

15. Schey, H. M. (2005). *Div, grad, curl, and all that: An informal text on vector calculus* (4th ed.). W. W. Norton & Company.

16. Spivak, M. (2018). *Calculus on manifolds: A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. CRC Press.